■ ■ ■

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on pose $u_a = e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_a = -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3$ et $w_a = -2e_1 - 4e_2 + ae_3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire φ_a telle que $\varphi_a(e_1) = u_a$, $\varphi_a(e_2) = v_a$ et $\varphi_a(e_3) = w_a$. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $\varphi_a(u)$ dans la base canonique.

2. Étude de φ_0.

a) Montrer que φ_0 est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $\varphi_0^{-1}(u)$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi_a$. Pour quelles valeurs de a, φ_a est-elle un automorphisme ?

4. Étude de φ_1.

a) Soient $f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$, $f_3 = e_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que $\operatorname{Vect}\{f_1\}$ et $\operatorname{Vect}\{f_2, f_3\}$ sont des supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer $\varphi_1(f_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

d) Posons $\psi = -\varphi_1^2$. Montrer que $\psi^2 = \psi$. Déterminer $\operatorname{Ker} \psi$ et $\operatorname{Im} \psi$ puis monter qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5. Étude de φ_{-2}. On suppose dans cette question que $a = -2$.

a) Déterminer les racines $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ du polynôme $X^2 + 6X - 5$.

b) On appelle valeur propre de φ_a tout réel λ tel que $\varphi_a - \lambda \operatorname{Id}$ soit non injective. Montrer que λ_1, λ_2 et 0 sont les seules valeurs propres de φ_a.

On note g_0, g_1 et g_2 trois vecteurs non nuls tels que $g_0 \in \operatorname{Ker} \varphi_a$, $g_1 \in \operatorname{Ker}(\varphi_a - \lambda_1 \operatorname{Id})$ et $g_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi_a - \lambda_2 \operatorname{Id})$.

c) Montrer que (g_0, g_1, g_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Étude d'une suite récurrente. Soient (r_n), (s_n) et (t_n) trois suites définies par $r_0 = 30$, $s_0 = 20$, $t_0 = 5$ et pour tout $n \geqslant 0$, $r_{n+1} = r_n - s_n - 2t_n$, $s_{n+1} = 2r_n - 5s_n - 4t_n$ et $t_{n+1} = r_n - 3s_n - 2t_n$. Déterminer r_n, s_n et t_n en fonction de n.