



Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites à valeurs réelles. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

La série  $\sum c_n$  est le produit de Cauchy des séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ . Pour tout entier naturel  $n$ , nous noterons  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  et  $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ .

**1. Un contre-exemple.** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .

- a) Étudier le comportement de  $\sum a_n$  et de  $\sum b_n$ .
- b) Que dire du produit de Cauchy des séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  ?

**2. Le cas positif.** On suppose dans cette question que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont à termes positifs et que leurs séries convergent respectivement vers les réels  $A$  et  $B$ .

- a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$C_n \leq A_n \cdot B_n.$$

- b) En déduire que  $\sum c_n$  est convergente vers un réel  $C$ .
- c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \cdot B_n \leq C_{2n}$ . En déduire que  $C = A \cdot B$ .

**3. Le cas absolument convergent.** On suppose dans cette question que les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent absolument. On note  $A$  et  $B$  les limites respectives de  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ .

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $\sum_{k=0}^n |a_k| \leq M$  et  $\sum_{k=0}^n |b_k| \leq N$ , alors  $\sum_{k=0}^n |c_k| \leq MN$ .
- b) En déduire que  $\sum c_n$  converge absolument. On notera  $C$  la limite de  $\sum c_n$ .
- c) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \cdot \sum_{k=0}^n b_k - \sum_{k=0}^n c_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot \sum_{k=0}^n |b_k| - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k |a_j \cdot b_{n-j}| \right|.$$

En déduire que  $C = A \cdot B$ .

**4. Application à la série exponentielle.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- a) Montrer que la série  $\sum \frac{a^n}{n!}$  converge. Sa limite sera notée  $e(a)$ .
- b) Montrer que  $e(a) \cdot e(b) = e(a + b)$ .

**5. Théorème de Mertens.** On suppose que  $\sum a_n$  converge absolument et que  $\sum b_n$  converge. On notera  $A$  et  $B$  les limites de  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ .

a) Montrer que si les suites  $(C_{2n} - A_n B_n)$  et  $(C_{2n+1} - A_{n+1} B_n)$  convergent vers 0, alors  $(C_n)$  converge vers un réel  $C$  tel que  $C = AB$ .

- b) Conclure.

La question 1. montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'absolue convergence sur les deux séries.