



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ . On dit que  $f$  est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Dans toute la suite, sauf mention contraire,  $f$  et  $g$  désignent des endomorphismes nilpotents.

**1.** On suppose que  $f$  est non nul. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul  $p$  tel que  $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . L'entier  $p$  est appelé l'indice de nilpotence de  $f$ . Par convention, l'indice de nilpotence de la matrice nulle vaut 0.

**2.** On note  $D$  l'opérateur de dérivation sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Montrer que  $D$  est un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

**3.** On note  $p$  l'indice de nilpotence de  $f$ .

**a)** Montrer qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $x_0 \notin \text{Ker } f^{p-1}$ .

**b)** Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est une famille libre.

**c)** En déduire que  $p \leq n$ .

**d)** En déduire que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**e)** Lorsque  $p = n$ , en déduire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**4.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que pour tout  $x \in E$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^k(x) = 0_E$ .

**a)** Montrer que  $f$  est un endomorphisme nilpotent.

**b)** Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus  $E$  de dimension finie.

**5.** On suppose que  $f$  et  $g$  commutent. Montrer que  $f \circ g$  et  $f + g$  sont des endomorphismes nilpotents.

**6.** On dit que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur  $x \in E$  non nul tel que  $f(x) = \lambda x$ . Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\lambda = 0$ .

**7. Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents - Question difficile.**

**a)** Montrer qu'il existe une base  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  soit de la forme  $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$ , où, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , la matrice  $J_i$  est une matrice carrée de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Les matrices } J_i \text{ sont appelés blocs de Jordan.}$$

**b)** Relier la dimension du noyau de  $f$  à l'entier  $r$ .