■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Système linéaire à paramètre) Soit a un nombre réel. Déterminer l'ensemble…

1. …$\mathscr{S}_1$ des solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} ax + ay = a \\ x + y = 2 \end{cases}$$

2. …$\mathscr{S}_2$ des solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} ax + y + a^2 z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 2. (Perpendiculaire commune) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes. Soient A_1 le point de coordonnées $(0, 2, -1)$ et $\overrightarrow{u}_1$ le vecteur de coordonnées $(1, 2, 3)$. On note D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1$. On note D_2 la droite qui admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à D_1 et à D_2.

1. Donner une équation paramétrique de la droite D_1.

2. Donner un vecteur directeur de D_2, noté $\overrightarrow{u}_2$.

3. Le point A_2 de coordonnées $(-1, 4, 2)$ appartient-il à la droite D_2 ?

4. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ (dont vous préciserez les coordonnées) tel que : $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à la fois au vecteur $\overrightarrow{u}_1$ et au vecteur $\overrightarrow{u}_2$ si et seulement s'il est colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$.
Ce vecteur $\overrightarrow{\omega}$ est-il unique ?

5. Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 (resp. P_2) passant par le point A_1 (resp. A_2) et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{\omega}$ (resp. $\overrightarrow{u}_2$ et $\overrightarrow{\omega}$).

6. Décrire l'intersection des plans P_1 et P_2.

7. En déduire une droite perpendiculaire aux droites D_1 et D_2.

Exercice 3. (Somme et fonction trigonométrique) Soit θ un nombre réel. On souhaite montrer que la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 4^k \sin^4(2^{-k}\theta)$ converge.

1. Exprimer $\sin^4\theta$ en fonction de $\sin^2\theta$ et $\sin^2(2\theta)$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de u_n en fonction de n, de $\sin(2^{-n}\theta)$ et de $\sin\theta$.

3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème. (Convergence d'un produit) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels non nuls. À la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est associé la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. Le produit (p_n) est dit convergeant si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon, il est dit divergeant.
On **admettra** que toute suite convergente est bornée.

1. En considérant, pour tout entier naturel n non nul le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2. Premier exemple. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = n + 1$.

b) Le produit (p_n) converge-t-il ?

3. Second exemple. Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \cos\frac{a}{2^n}$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En évaluant $p_n \sin\frac{a}{2^n}$, exprimer p_n en fonction de a et de n.

b) En déduire que le produit (p_n) converge et déterminer sa limite.

4. Soit (v_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b) On suppose que la suite (T_n) converge vers une limite ℓ. Étudier le sens de variations de la suite (p_n) et en déduire qu'elle converge.

c) En déduire la nature (i.e. convergence ou divergence et limite éventuelle) de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 1 et (p_n) la suite de produits associée ; On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln u_k$. Montrer que la suite (S_n) converge si et seulement si le produit (p_n) converge. Dans ce cas, donner la limite de la suite (p_n) en fonction de la limite de (S_n).

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 3,

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln k}{k}.$$

b) En déduire la nature de la suite (S_n) et celle du produit (p_n).

7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^{2^k})$.

a) Quelle est la nature du produit (p_n) quand $a \geqslant 1$?

On suppose dans la suite de la question que $a \in]0, 1[$.

b) Montrer que le produit (p_n) converge.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $(1 - a^2)p_n$. En déduire la limite de la suite (p_n).