■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. Soit $P = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathscr{Im}(z) \geqslant 0\}$. Pour tout $(z, z') \in P^2$, z est en relation avec z', noté $z \preceq z'$ si
$$|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathscr{Re}(z) \leqslant \mathscr{Re}(z')).$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur P.

2. Cet ordre est-il total ou partiel ?

Exercice 2. Soient $\omega = e^{i\frac{2\pi}{9}}$ et $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$.

1. Montrer que $\overline{\omega}^4 + \overline{\omega}^3 + \overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2. Exprimer, en fonction des puissances de α, les quantités

a) $\overline{\omega} + \omega$.
b) $\overline{\omega}^2 + \omega^2$.
c) $\overline{\omega}^3 + \omega^3$.
d) $\overline{\omega}^4 + \omega^4$.

3. En déduire que α est solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

4. On définit $x_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie, monotone et majorée.
b) En déduire que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite en fonction de α.

Exercice 3. (Calcul de somme) Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et f la fonction définie pour tout nombre complexe z par $f(z) = (1+z)^{99}$.

1. Pour tout entier naturel k, déterminer $1 + j^k + j^{2k}$.
Indication : distinguer les cas en fonction du reste de la division euclidienne de k par 3.

2. Montrer que
$$f(1) + f(j) + f(j^2) = 2^{99} - 2.$$

3. En déduire la valeur de $s = \sum_{k=0}^{33} \binom{99}{3k}$.

Exercice 4. (Transformation sur $\mathbb{C}$) Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z, on note $\mathscr{Re}(z)$ sa partie réelle et $\mathscr{Im}(z)$ sa partie imaginaire. $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}^\star \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i}. \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}^\star$, il existe un unique $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$ tel que $f(z) = Z$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. On note $z = a + bi$ sous forme algébrique.

a) Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple de cet ensemble.

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple de cet ensemble.

d) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$. Donner une interprétation géométrique simple de cet ensemble.

3 . a) Déterminer l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ lorsque z parcourt $i\mathbb{R}\backslash\{i\}$.

b) Montrer que l'ensemble des points d'affixe $f(z)$, lorsque z parcourt $\mathbb{R}$ est le cercle de centre J d'affixe $-\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de 0.

c) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow \mathscr{I}m\,(f(z)) = -\frac{1}{2}$.

4 . a) Résoudre l'équation $f(z) = -\overline{z} + \sqrt{3}$. Les solutions seront exprimées sous forme trigonométrique.

b) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

Problème. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, au point M de coordonnées (x, y) on associe l'affixe $m = x + iy$. Le conjugué de z est noté $\overline{z}$, son module $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ et sa partie réelle $\mathscr{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Partie I : $(p:q)$ points et sous-triangles

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b. Soient p et q deux réels strictement positifs.

1. Montrer qu'il existe un unique point d'affixe z vérifiant $\frac{z-a}{b-z} = \frac{p}{q}$. Ce point est appelé le $(p:q)$ point de A à B. Donner son affixe.

2. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Montrer que le $(p:q)$ point de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$ point de A à B coïncident.

3. Caractériser le $(1:1)$ point de A à B.

Soient A, B, C trois points distincts deux à deux. On notera c l'affixe de C.

4. Soient X le $(p:q)$ point de A à B et Y le $(p:q)$ point de A à C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).

On appelle $(p:q)$ sous-triangle du triangle $\Delta(ABC)$ le triangle $\Delta(A'B'C')$ où

- A' est le $(p:q)$ point de A à B d'affixe a',
- B' est le $(p:q)$ point de B à C d'affixe b',
- C' est le $(p:q)$ point de C à A d'affixe c'.

L'isobarycentre (ou centre de gravité) G du triangle $\Delta(ABC)$ est le point d'affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$.

5. Montrer que le $(p:q)$ sous-triangle du triangle $\Delta(ABC)$ a le même isobarycentre que $\Delta(ABC)$.

Partie II : Étude de suites

On considère une suite de triangles $\Delta(A_kB_kC_k)$ construits de la manière suivante. Le triangle $\Delta(A_0B_0C_0)$ est fixé (ses sommets deux à deux distincts). Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta(A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1})$ est le $(p:q)$ sous-triangle du triangle $\Delta(A_kB_kC_k)$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, par a_k, b_k, c_k les affixes des points A_k, B_k, C_k.

6. Exprimer a_{k+1} (resp. b_{k+1} et c_{k+1}) en fonction de a_k, b_k et c_k.

7. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$ et $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$. Montrer que les suites (α_k), (β_k) et (γ_k) sont des suites géométriques dont vous préciserez la raison.

8. Déterminer, pour tout entier naturel k, les valeurs de a_k, b_k et c_k en fonction de α_k, β_k et γ_k.

9. Monter que les suites (a_k), (b_k) et (c_k) convergent et déterminer leur limite.