■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Calculs de limite)

1. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

2. On note $u = \left(n^\alpha \arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

a) Exprimer, pour tout $x \in [-1,1]$, la quantité $\sin(\arccos(x))$ en fonction des fonctions racines.

b) En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite (u_n) converge vers un réel non nul et déterminer sa limite.

Problème. (Suite récurrente) Étant donné un réel a positif ou nul, on note $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = a$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel a (dont vous préciserez la valeur) pour lequel la suite u est constante.

2. Montrer que si la suite u converge vers un réel ℓ, alors $\ell = 0$.

3. Montrer que si pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{n}$, alors la suite u est croissante et tend vers $+\infty$.

4. On suppose que

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^\star \;;\; u_k < \sqrt{k}.$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant k$, $u_n < \sqrt{n}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant k}$ est décroissante.

c) Que dire du comportement asymptotique de (u_n) ?

Dans toute la suite, on suppose que $a \neq 0$.

5 . a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, le réel $\ln(u_n)$ est bien défini.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ln(u_n) = 2^{n-1}\ln(a) - 2^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 2^{-n-1}\ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

6 . a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n.$$

c) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(2)$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln(2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(2).$$

d) Montrer que la suite (v_n) converge et que sa limite, que l'on notera dans toute la suite W, vérifie

$$\frac{\ln(2)}{2} \leqslant W \leqslant \ln(2).$$

7 . a) Montrer que la suite u converge si et seulement s'il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

b) Montrer que la suite u converge si et seulement si $a < e^{\frac{W}{2}}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $a \geqslant e^{\frac{W}{2}}$.

8. Montrer que, si $a < \sqrt[4]{2}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que si $a \geqslant \sqrt{2}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Problème. (Étude d'une suite)

Partie I : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser les branches infinies de la courbe représentative de f.

Précision : Dresser le tableau de variations de f.

2. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis la position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie II : Étude d'une équation différentielle

Soit n un entier naturel non nul. On note (E_n) l'équation différentielle $xy' - (n-2x^2)y = n - 2x^2$. Soit (H_n) l'équation sans second membre associée à (E_n).

4. Résoudre (H_n) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

5. En déduire les solutions de (E_n) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

6. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

Partie III : Étude de deux suites

On suppose dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n : x \mapsto 3x^n e^{-x^2} - 1$.

7. Quels sont les signes de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$?

8. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

9. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$?

10 . a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

11. Soit g_n définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par $g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que $\ell \neq 1$. Montrer qu'on obtient une contradiction puis conclure.

c) Soit $(w_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par $w_n = u_n - 1$. En utilisant un équivalant de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$, déterminer un équivalent simple de w_n.