■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Problème. Dans tout ce problème, a désigne un réel. Étant donné un polynôme P,on se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n+P(n).$$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant. La partie II étudie le cas où $a\neq 1$. La partie III étudie le cas où $a=1$.

Partie I : Polynôme constant

Dans cette partie, on pose

$$E_a^{(0)}=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists\ b\in\mathbb{R}\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n+b\right\}.$$

1. Soit $u\in E_a^{(0)}$. Il existe un réel b tel que pour tout n entier naturel, $u_{n+1}=au_n+b$. Montrer l'unicité de b.
Lorsque u est dans $E_a^{(0)}$, on notera $b=b_u$.

2 . a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, on suppose que $a\neq 1$.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (i.e. pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n=1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $y_n=a^n$.

a) Montrer que x et y sont dans $E_a^{(0)}$.
On précisera les valeurs de b_x et b_y.

b) Montrer que la famille (x,y) est libre.

5. Soit $u\in E_a^{(0)}$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases}\lambda x_0+\mu y_0=u_0\\ \lambda x_1+\mu y_1=u_1\end{cases}$$

b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n=\lambda x_n+\mu y_n.$$

c) Que peut-on en conclure ?

6. Donner une base et la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II : Le cas $a \neq 1$

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$. On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. On pose

$$E_a^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \exists\ P \in \mathbb{R}_p[X] \ ; \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + P(n) \right\}.$$

7. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P.

On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

8. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

9. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

10. Montrer que $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Vect}\{y\}$, où y est la suite définie dans la **Partie I**.

11. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

a) Quel est le degré de Q_k ?

b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.

d) Que peut-on en conclure ?

12. Déduire des questions précédentes que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et préciser sa dimension.

13. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on note $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $x_n^{(k)} = n^k$. On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $y_n = a^n$. Montrer que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

14. Application : Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III : Le cas $a = 1$

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

15. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer

$$E_1^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \exists\ P \in \mathbb{R}_p[X] \ ; \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + P(n) \right\}.$$

16. Application : Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall\ n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Problème. Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{C}_d[X]$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d et par U_d le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré d (unitaire signifiant que le coefficient dominant vaut 1).

Partie I : Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - x_k),$$

on note P' le polynôme dérivé de P.

1. Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j)P'(x_j)}.$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n-1$.

b) Montrer que $P_j(x_k) = \delta_{jk}$, pour k dans $[\![1, n]\!]$, et montrer que, pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \sum\limits_{j=1}^{n} F(x_j)P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \dots, x_n$.

c) Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{n} P_j = 1$.

d) Les polynômes $(P_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ forment-ils une base de E_{n-1} ?

2. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on note sous forme canonique $P_j(X) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$.

Soient V et B les matrices complexes carrées de taille n dont l'élément à la i^{eme} ligne ($1 \leqslant i \leqslant n$) et à la j^{eme} colonne ($1 \leqslant j \leqslant n$) sont respectivement $(x_i)^{j-1}$ et $b_{i-1,j}$. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

3 . a) Montrer que $b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}$. Pour tout entier $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

Dans toute la suite du problème, $d \in \mathbb{N}^\star$ est un entier fixé, et K est le disque unité fermé, c'est-à-dire $K = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}_d[X]$, on pose

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)|.$$

Partie II : Norme sur $\mathbb{C}_d[X]$

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}_d[X]$, défini sous forme canonique par $Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$, on pose

$$N(Q) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|.$$

4 . a) Montrer que $\|Q\|_K$ est bien défini pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_d[X]$.

b) Montrer soigneusement que pour tout Q_1 et Q_2 de $\mathbb{C}_d[X]$ et pour tout λ de $\mathbb{C}$,

$$\|Q_1 + Q_2\|_K \leqslant \|Q_1\|_K + \|Q_2\|_K \text{ et } \|\lambda Q_1\|_K = |\lambda| \|Q_1\|_K.$$

c) Montrer que pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_d[X]$,

$$\|Q\|_K = 0 \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow N(Q) = 0.$$

5 . a) Majorer $\sup\limits_{Q \in \mathbb{C}_d[X],\, Q \neq 0} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)}$.

b) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K, $x_1, \ldots x_{d+1}$, et l'on reprend les notations de la première partie. On pose $\beta = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant d,\, 1 \leqslant j \leqslant d+1} |b_{i,j}|$. En utilisant le résultat de la question **1.b)**, montrer que

$$\sup_{Q \in \mathbb{C}_d[X],\, Q \neq 0} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1).$$

6. Montrer que $\inf\limits_{Q \in U_d} \|Q\|_K \leqslant 1$.

Partie III : Variations polynomiales

7. Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et c_k un nombre complexe non nul. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k (X - z_0)^k.$$

Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.
On pourra considérer le module et l'argument de c_k et de $z - z_0$.

8. Plus généralement, soit $Q \in \mathbb{C}_d[X]$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$, un nombre complexe c_k, $c_k \neq 0$, et un polynôme R tels que

$$Q(X) = 1 + c_k (X - z_0)^k + c_k (X - z_0)^{k+1} R(X).$$

b) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| = r$ et

$$Q(z) = 1 + |c_k| \cdot |z - z_0|^k + |c_k| \cdot |z - z_0|^k (z - z_0) R(z).$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et

$$|Q(z)| > |Q(z_0)|.$$

On pourra utiliser le fait que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) R(z) = 0$.

9. Montrer que la propriété démontrée à la question **8.c** est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathbb{C}_d[X]$ et pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.