Récursivité (Compléments)

■ ■ ■

Exercice 1. Écrire une fonction récursive `somme n` qui calcule la somme des `n` premiers entiers naturels non nuls puis démontrer sa terminaison.
`somme : int -> int`

Exercice 2. (Fonction 47) On considère la fonction

```
let rec f n p =
  match (n, p) with
  | (0,_) -> 47
  | _ -> f (n-1) (f (n-1) (p+7)) ;;
```

Montrer que `f` termine et déterminer les valeurs retournées.

Exercice 3. (MacCarty) Montrer la terminaison puis déterminer les valeurs retournées par la fonction :

```
let rec f n =
  if n > 100 then n-10
  else f(f (n+11)) ;;
```

Exercice 4. (Morris)

```
let rec morris a b =
  match (a,b) with
  | (0,_) -> 1
  | (m,n) -> morris (m-1) (morris m n) ;;
```

Cette fonction termine-t-elle ?

Exercice 5. (Ackermann, 1828)

```
let rec ackermann n p =
  match (n, p) with
   | 0, p -> p + 1
   | n, 0 -> ackermann (n-1) 1
   | n, p -> ackermann (n-1) (ackermann n (p-1)) ;;
```

1. Montrer que cette fonction termine.

2. Montrer que, pour tout entier naturel `p`,

a) `ackermann 0 p` $= \mathtt{p} + 1$.

b) `ackermann 1 p` $= \mathtt{p} + 2$.

c) `ackermann 2 p` $= 2\mathtt{p} + 3$.

d) `ackermann 3 p` $= 2^{\mathtt{p}+3} - 3$.

e) `ackermann 4 p` $= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}}} - 3$, où le nombre de 2 dans les puissances est égal à `p`.

Exercice 6. Transformer la fonction `puissance` récursive suivante en une fonction récursive terminale.

```
let rec puissance_non_t n x =
  match n with
    | 0 -> 1
    | _ -> x * puissance_non_t (n-1) x ;;
```

`puissance : int -> int -> int`

Exercice 7. Soient $\mathtt{a}$ un caractère et $\mathtt{c}$ et $\mathtt{d}$ des opérateurs d'arités respectives 2 et 3. On note E l'ensemble des expressions définies par $\mathtt{a} \in E$, et si e_1, e_2 et e_3 sont des expressions de E, alors $\mathtt{c}(e_1, e_2)$ et $\mathtt{d}(e_1, e_2, e_3)$ appartiennent à E.
Étant donnée une expression e appartenant à E, on note $|e|_{\mathtt{a}}$, $|e|_{\mathtt{c}}$ et $|e|_{\mathtt{d}}$ le nombre de $\mathtt{a}$, resp. $\mathtt{c}$ et $\mathtt{d}$ dans e.

1. Montrer que E est muni d'un ordre bien fondé.

2. En déduire que pour tout $e \in E$, $|e|_{\mathtt{a}} = 2|e|_{\mathtt{d}} + |e|_{\mathtt{c}} + 1$.