



Soient E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie). Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. L'endomorphisme v est *adjoint* de u si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

1. Montrer que tout endomorphisme admet un unique adjoint, noté u^* , puis que $(u^*)^* = u$.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Exprimer la matrice de u^* dans la base \mathcal{B} en fonction de celle de u .
3. Le cas de la dimension infinie.

a) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire qui rend la base canonique orthonormée, déterminer l'adjoint de l'opérateur de dérivation.

b) On considère, dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ l'endomorphisme $u : f \mapsto f(0)$. Montrer que u n'admet pas d'adjoint.

4. Montrer que $\psi : u \mapsto u^*$ est un automorphisme.
5. Exprimer $(u \circ v)^*$ en fonction de u^* et de v^* .
6. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est stable par u si et seulement si F^\perp est stable par u^* .
7. Montrer les égalités :

$$\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp \text{ et } \text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp.$$

L'endomorphisme u est *autoadjoint* si $u^* = u$.

8. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.
9. Montrer que l'ensemble des endomorphismes autoadjoints forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Soit u un endomorphisme autoadjoint. L'endomorphisme u positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (resp. $>$).

10. Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme positif sont réelles positives. En déduire que son polynôme caractéristique est scindé.
11. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont autoadjoints positifs.

L'endomorphisme u est dit *antisymétrique* si $u^* = -u$.

12. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle = 0$.
13. En dimension 3, montrer que, si u est antisymétrique, il existe $\omega \in E$ tel que $u(x) = t \wedge x$.