

■ Chapitre 6 ■

Probabilités sur des ensembles finis ou dénombrables

Exercice 1. (Rappels de dénombrements) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et p un entier naturel. Pour chacune des expériences suivantes, proposer éventuellement une modélisation en termes d'ensemble de fonctions, puis déterminer le nombre de résultats possibles.

1. Tirages successifs et avec remise de p boules.
2. Tirages successifs et sans remise de p boules.
3. Tirage simultané de p boules.

Déterminer...

4. ... le nombre d'éléments de $\{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p ; 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$.
5. ... le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT.

Définition 1 (Ensemble dénombrable).

Un ensemble Ω est *dénombrable* s'il existe une bijection de \mathbb{N} sur Ω .

Exercice 2. Montrer que...

1. ... \mathbb{N} , $2\mathbb{N}$, \mathbb{Z} sont dénombrables.
2. ... $f : (p, q) \mapsto q + \sum_{k=1}^{p+q} k$ réalise une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} .

Propriété 1 (Produit cartésien & Dénombrabilité).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\Omega_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des ensembles dénombrables. Le produit cartésien $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ est dénombrable.

Propriété 2.

Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable.

Exercice 3. Montrer que \mathbb{Q} est dénombrable.

Propriété 3.

Soit Ω un ensemble non vide. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i). Ω est un ensemble fini ou dénombrable, i.e. il existe une injection de Ω dans \mathbb{N} .
- (ii). Il existe une surjection de \mathbb{N} dans Ω .

Exercice 4.

1. Soit $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables. Montrer que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ est dénombrable.
2. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.



Notation.

- Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble non vide, fini ou dénombrable.

I. Mesures de probabilité

I.1 Tribus

Définition 2 (Tribus, Espace probabilisable).

Soit \mathcal{F} un ensemble de parties de Ω . L'ensemble \mathcal{F} est une *tribu* (ou σ -algèbre) sur Ω si

- (i). $\Omega \in \mathcal{F}$.
- (ii). pour tout $A \in \mathcal{F}$, ${}^cA \in \mathcal{F}$.
- (iii). pour tout $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Le couple (Ω, \mathcal{F}) est un espace *probabilisable*.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{\emptyset, \Omega\}$ sont des tribus sur Ω .
2. Soit $A \subset \Omega$. Montrer que $\{\emptyset, A, {}^cA, \Omega\}$ est une tribu sur Ω .
3. $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ est-elle une tribu sur $\{1, 2\}$?
4. Lorsque Ω est fini, déterminer le nombre maximal d'éléments de \mathcal{F} .
5. Montrer que l'intersection de deux tribus est encore une tribu.
6. **Tribu engendrée.** Soit $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une plus petite tribu \mathcal{F} contenant A .

Définition 3 (Expérience aléatoire, Univers, Événements).

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable.

- (i). Pour certaines expériences, on ne peut prédire avec certitude le *résultat*, on peut seulement décrire l'ensemble des résultats possibles. Ces expériences sont dites *aléatoires*. L'ensemble de tous les résultats possibles est l'*univers*, noté Ω .
- (ii). Les éléments de \mathcal{F} sont des *événements*.
- (iii). Soient A, B deux événements. Si $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont des événements *incompatibles*.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour chacune des expériences suivantes, déterminer l'univers ainsi qu'une tribu naturelle associée.
 - a) Lancer unique d'une pièce de monnaie.
 - b) Lancer unique d'un dé à 6 faces.
2. On effectue n lancers consécutifs d'une pièce de monnaie. Décrire l'univers Ω que l'on munira de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les événements A : *La pièce a renvoyé face* et B : *La pièce a renvoyé k fois pile* s'écrivent comme une réunion finie de singletons de Ω .
3. **Collectionneur de cartes.** Une marque de chocolat propose, pour tout achat d'une tablette, un portrait de mathématicien. Lors de l'achat de la tablette, le portrait n'est pas visible. Au total, la chocolaterie propose N portraits distincts. Un collectionneur achète des tablettes tant qu'il n'a pas obtenu les N portraits. Modéliser cette expérience.

Propriété 4.

Soient \mathcal{F} une tribu sur Ω , $n \in \mathbb{N}$ et $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$.

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> (i). $\emptyset \in \mathcal{F}$. (ii). $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$. | <ul style="list-style-type: none"> (iii). $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$. (iv). $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$. |
|---|--|

Définition 4 (Système complet d'événements).

Soient (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable et $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. La famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un *système complet d'événements* si

- (i). Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.
- (ii). $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.

1. Soit $A \subset \Omega$. Montrer que $(A, {}^cA)$ est un système complet d'événements.
2. Si $\Omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$, montrer que $(\{\omega_i\})_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

I.2 Probabilités**Définition 5 (Probabilité, Espace probabilisé, Axiomatique de KOLMOGOROV).**

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. L'application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une *probabilité* sur (Ω, \mathcal{F}) si

- (i). $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (ii). **σ -Additivité.** Pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles la série $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge et

$$\mathbb{P} \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé*.

Exercice 8. Proposer un espace probabilisé raisonnable pour...

1. ... le lancer unique d'une pièce éventuellement biaisée.
2. ... le lancer unique d'un dé équilibré à 6 faces.

Propriétés 5.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$.

- (i). $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii). Si A_1, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{P} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.
- (iii). $\mathbb{P}({}^cA) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- (iv). Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
- (v). Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- (vi). $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Propriété 6 (Continuités croissante & décroissante).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- (i). Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset A_{k+1}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right).$$

- (ii). Si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} \subset B_k$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \right).$$

Exercice 9. Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que

1. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$.
2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right)$.

Propriété 7 (Sous-additivité, Inégalité de BOOLE).

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k),$$

où le membre de droite est défini sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Exercice 10. (Formule du crible / Formule de POINCARÉ, H.P.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in [1, n]} \in \mathcal{F}^n$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right).$$

Définition 6 (Événement négligeable, presque sûr).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{F}$.

- (i). Si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors B est un événement *négligeable*.
- (ii). Si $\mathbb{P}(B) = 1$, alors B est un événement *presque sûr*.

1.3 Probabilités sur des ensembles finis ou dénombrables

Théorème 1 (Cas fini).

On suppose que $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

- (i). Si \mathbb{P} est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si, pour tout i entier de $[1, n]$, $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$, alors $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
- (ii). Si $(p_i)_{i \in [1, n]}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. En posant, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i; x_i \in A} p_i$, l'application \mathbb{P} est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 11. Montrer que les triplets suivants (munis de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$) sont des espaces probabilisés.

1. **Équiprobabilité.** Si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, $p_k = \frac{1}{n}$.
2. **BERNOULLI.** Si $\Omega = \{0, 1\}$ et $p \in [0, 1]$, $p_0 = 1 - p_1 = p$.
3. **Binomiale.** Si $\Omega = [0, n]$ et $p \in [0, 1]$, $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Théorème 2 (Cas dénombrable).



On suppose que $\Omega = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

- (i). Si \mathbb{P} est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En posant, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.

(ii). Si $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$. Alors, en posant, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i; x_i \in A} p_i$, l'application \mathbb{P} est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 12. Montrer que les triplets suivants (munis de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$) sont des espaces probabilisés.

1. Géométrique. Si $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, $p_k = p(1-p)^{k-1}$.

2. POISSON. Si $\Omega = \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

II. Indépendance

II.1 Probabilité conditionnelle

Définition 7 (Probabilité conditionnelle).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B , notée $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

De plus, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot|B))$ est un espace probabilisé.

Exercice 13.

1. Un ami a lancé deux pièces équilibrées. Il vous dit qu'une des pièces a renvoyé face. Quelle est la probabilité que les deux pièces aient renvoyé face ?

2. Deux dés équilibrés à 6 faces sont lancés successivement. Étant donné que le premier des dés a renvoyé 3, quelle est la probabilité que la somme des 2 soit strictement supérieure à 6 ?

Propriété 8 (Formule des probabilités composées).



Soit $(A_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements tels que $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$ ne soit pas négligeable. Alors,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Théorème 3 (Formule des probabilités totales).



Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k).$$

Exercice 14. (Loi de succession de LAPLACE) Soient $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard. Dans l'urne choisie, on tire, avec des tirages indépendants, des boules avec remise.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité $p_N(n)$ que la $(n + 1)$ -ème boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?

2. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(n)$.

Exercice 18.

1. Montrer que toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants.
2. Montrer que, si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants, alors pour tout $\{i, j\} \subset \mathbb{N}$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
3. On lance deux fois une pièce équilibrée. On note A l'événement *Le premier lancer renvoie pile*, B l'événement *le second lancer renvoie face* et C l'événement *les deux lancers renvoient le même résultat*. Les événements A , B et C sont-ils mutuellement indépendants ?
4. Dans l'exemple précédent concernant le singe, montrer que A_1 , A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants.

**Propriété 10 (Lemme des coalitions).**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

- (i). Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles telle que pour tout $i \in I$, B_i est égal à A_i ou à ${}^c A_i$. Alors, $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- (ii). Soient (I_1, \dots, I_n) des parties de I finies et deux à deux disjointes et $(B_i)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_j est égal à $\bigcap_{k \in I_j} A_k$ ou à $\bigcup_{k \in I_j} A_k$. Alors, $(B_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 19. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ qui modélise le lancer d'une pièce déséquilibrée. On suppose ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n que la pièce tombe sur pile lors du n -ème lancer est de probabilité $p \in]0, 1[$. Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.

**Lemmes de BOREL-CANTELLI**

Exercice 20. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On note B l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité d'événements A_n et C l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les événements A_n sauf un nombre fini.

1. a) Montrer que $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$ et $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$.

b) En déduire que B et C sont des événements.

2. Lemme de BOREL-CANTELLI n°1.

On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Pour tout entier naturel n , on pose $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$.

a) Majorer $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction du reste d'une série convergente.

b) En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$, puis déterminer $\mathbb{P}(B)$.

3. On suppose qu'il existe un espace probabilisé modélisant les lancers indépendants et successifs de pièces déséquilibrées telles que, lors du n -ème lancer, la pièce renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{n^2}$. Montrer que, presque sûrement, la pièce ne renvoie Pile qu'un nombre fini de fois.

4. Lemme de BOREL-CANTELLI n°2.

On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.

a) Montrer que $0 \leq \prod_{k=0}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \exp\left\{-\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(A_k)\right\}$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(^cB) = 0$ puis que $\mathbb{P}(B) = 1$.

5. Soient $p \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Une pièce de monnaie renvoie pile avec probabilité p . On lance cette pièce une infinité de fois et on note P_n l'événement : *le n-ème lancer renvoie pile*.

a) En posant $A_k = \bigcap_{i=km+1}^{(k+1)m} P_i$, montrer que (A_n) satisfait les hypothèses du résultat précédent.

b) En déduire que, avec probabilité 1, il apparaît une infinité de séquences de m piles consécutifs.



Programme officiel (PCSI)

Probabilités - A - Généralités (p. 30)



Programme officiel (PSI)

Probabilités - A - Espaces probabilisés (p. 19)

Mathématiciens

BERNOULLI Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).

BAYES Thomas (1702 à Londres-17 avr. 1761 à Tunbridge Wells).

LAPLACE Pierre-Simon (23 mar. 1749 à Beaumont-en-Auge-5 mar. 1827 à Paris).

POISSON Siméon Denis (21 juin 1781 à Pithiviers-25 avr. 1840 à Sceaux).

BOOLE George (2 nov. 1815 à Lincoln-8 déc. 1864 à Ballintemple).

POINCARÉ Jules Henri (29 avr. 1854 à Nancy-17 juil. 1912 à Paris).

BOREL Émile (7 jan. 1871 à St Affrique-3 fév. 1956 à Paris).

CANTELLI Francesco (20 déc. 1875 à Palerme-21 juil. 1966 à Rome).

KOLMOGOROV Andreï Nicolaïevitch (25 avr. 1903 à Tambov-20 oct. 1987 à Moscou).