



Certaines questions de ce sujet font intervenir de l'algèbre euclidienne. Toutes les parties sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'opérateur différence est défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Opérateur de différence.

a) Déterminer $\Delta(\mathbb{R}_n[X])$ puis $\text{Ker } \Delta$.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et m entier naturel, montrer que $(\Delta^m P)(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k)$.

Partie I : Polynômes de BERNOULLI

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et $f(0) = 1$.

2. Étude de la régularité de la fonction f .

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

3. Variations de la fonction f .

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de f .

b) Dresser le tableau des variations de f , puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

4. Développement limité. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer le développement limité de $\frac{e^x - 1}{x}$ à l'ordre n en 0.

b) En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.

On notera $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

c) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3 .

5. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n .

Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n -ème polynôme de BERNOULLI. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

6. Déterminer B_0, B_1, B_2 en explicitant les coefficients.

7. Soit $n \geq 2$. Montrer les égalités suivantes.

a) $B_n(0) = B_n(1)$.

b) $B'_n(X) = n B_{n-1}(X)$.

c) $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$.

d) Calculer $\Delta B_1, \Delta B_2$ et en déduire que $(\Delta B_n)(X) = n X^{n-1}$.

8. Une nouvelle définition.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes définie par $B_0 = 1, \Delta B_n = n X^{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$ pour tout n entier naturel non nul.

b) En déduire que $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(X) = n X^{n-1}$.

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$b_{2n+1} = B_n(1) = B_n(0) = B_n(1/2) = 0$$

Partie II : Polynômes de HILBERT

On pose $H_0 = 1$ et pour tout $n > 0$, $H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

9. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

10. Montrer que, pour tout n entier naturel, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

11. Pour tout n entier naturel, calculer ΔH_n .

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

12. En utilisant les nombres $(Dg^m P)(0)_{m \in \mathbb{N}}$, exprimer P dans la base des $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

13. En déduire que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P dans la base des $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont entières.

Partie III : Polynômes d'EULER

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(X+1) + P(X)$. Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

14. Montrer que φ est bijective.

15. Montrer qu'il existe un unique polynôme, noté E_n , satisfaisant la relation $P(X+1) + P(X) = 2X^n$.

16. Déterminer une relation simple entre E'_n et E_{n-1} .

17. En déduire que

$$E_n(X+1) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} E_p(X).$$

18. À l'aide de la relation précédente, exprimer E_n en fonction des $(E_p)_{p \leq n-1}$.

19. Démontrer que $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.

Partie IV : Polynômes de TCHEBYCHEV

On définit par récurrence la suite de polynômes

$$T_0 = 1, T_1 = X, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Le polynôme T_n est le n ème polynôme de Tchebychev. Dans tout ce T.D., on identifiera polynômes et fonctions polynomiales.

20. Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4 .

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est un polynôme à coefficients entiers dont vous déterminerez la parité, le degré et le coefficient dominant.

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

23. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

b) Montrer que $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$.

24. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n possède exactement n racines distinctes.

Pour $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, la norme infinie de f , notée $\|f\|_\infty$ est le réel $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

25. Justifier l'existence de la norme infinie.

26. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

27. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout réel u , $|\sin(nu)| \leq n |\sin(u)|$.

b) En déduire $\|T'_n\|_\infty = n^2$.

28. Montrer que pour tout réel strictement positif r , $T_n(\frac{r+r^{-1}}{2}) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}$.

29. Soit $x \in [1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \frac{r+r^{-1}}{2}$.

b) En déduire que $1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$.

30. En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n .

31. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Déduire de la question précédente que $T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!}$.

32. Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

Partie V : Polynômes de **LEGENDRE**

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ la dérivée k -ème du polynôme P . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes définis par

$$U_n = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

La famille (L_n) est la famille des polynômes de Legendre. Pour tout polynôme P , on note $\mathcal{L}(P)$ le polynôme

$$\mathcal{L}(P) = [(X^2 - 1)P']'.$$

33. a) Calculer L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .

c) En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

34. Montrer que L_{2n} (resp. L_{2n+1}) est une fonction paire (resp. impaire).

35. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$.

b) En déduire les valeurs de $L_n(-1)$ et de $L_n(1)$.

36. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U'_{n+1} - 2(n+1)X \cdot U_n = 0 \quad (1)$$

$$(X^2 - 1)U'_n - 2nX \cdot U_n = 0 \quad (2)$$

b) En dérivant les équations précédentes, montrer que la suite (L_n) vérifie

$$L'_{n+1} = X \cdot L'_n + (n+1)L_n \quad (3)$$

$$\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n \quad (4)$$

c) En déduire que la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme que nous noterons $\mathcal{L}_n$. Exprimer la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$.

37. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

38. Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle$. On dit que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme autoadjoint.

39. a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une famille de polynômes orthogonaux.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

40. Montrer que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

41. En considérant un polynôme $Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que L_{n+1} possède $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Cette propriété est vérifiée par toutes les familles de polynômes orthogonaux.

42. Calculer la distance de X^{n+1} au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Mathématiciens

BERNOULLI Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).

EULER Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).

LEGENDRE Adrien-Marie (18 sept. 1752 à Paris-9 jan. 1833 à Paris).

TCHEBYCHEV Pafnouti Lvovitch (16 mai 1821 à Borovsk-8 déc. 1894 à St Pétersbourg).

HILBERT David (23 jan. 1862 à Wehlau-14 fév. 1943 à Göttingen).