Dénombrement de surjections

■ ■ ■

Partie I : Préliminaires

Soient q, k, p trois entiers tels que $0 \leqslant q \leqslant k \leqslant p$.

1. Montrer que $\binom{p}{k} \cdot \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \cdot \binom{p-q}{p-k}$.

2. En déduire $\sum_{\ell=q}^{p} (-1)^{p-\ell} \binom{p}{\ell}\binom{\ell}{q} = \delta_{p,q}$, où $\delta_{p,q} = 0$ si et seulement si $p \neq q$.

3. Soient n un entier naturel, $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de réels. On suppose que pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a_q = b_p$. Pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, exprimer $\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} b_k$ en fonction de a_p.

Partie II : Nombre de surjections

Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note S_n^p le nombre d'applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Par convention, on pose $S_n^0 = S_0^n = 0$ et $S_0^0 = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Déterminer S_n^1, S_n^2, S_n^n.

b) Soit $p > n$. Déterminer S_n^p.

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_n^k$.

d) On suppose n différent de 0. En déduire que

$$\forall\, p \in [\![1,n]\!],\ S_n^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} k^n.$$

5. a) On suppose que $2 \leqslant p \leqslant n$. En considérant la restriction à $[\![1,n-1]\!]$ d'une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$, montrer que

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right).$$

b) Cette relation est-elle encore vraie lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$?

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $S_{n+1}^n = \frac{n}{2}(n+1)!$.

Partie III : Nombre de partitions

Soit n un entier naturel quelconque, E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul. On dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si et seulement si

(i). $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$,

(ii). $\forall\, i \in [\![1,k]\!]$, $A_i \neq \emptyset$,

(iii). $\forall\, i, j \in [\![1,k]\!]$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

On note R_n^k le nombre de partitions de E en k classes. On convient que $R_n^0 = 0$ si $n \geqslant 1$ et $R_0^0 = 1$. On note $R(n)$ le nombre de partitions de E et on convient que $R(0) = 1$.

6. Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$, alors $R_n^k = 0$.

7. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $R(n) = \sum_{k=0}^{n} R_n^k$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $R(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R(k)$.

c) Calculer $R(n)$ pour $n \in [\![1,6]\!]$.

d) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 5$, alors $R(n) \geqslant 2^n$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n, $R(n) \leqslant n^n$.

8. Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $R_n^k = \frac{S_n^k}{k!}$.