



**Partie I : Convexité**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est *convexe* si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La fonction  $f$  est *concave* si  $-f$  est convexe.

1. Montrer que les fonctions affines sont convexes.
2. Montrer que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessous de chacune de ses cordes.
3. Montrer, par une récurrence soigneuse, l'inégalité de **JENSEN** : si  $f$  est convexe, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{i \in [1, n]} \in I^n, \forall (\lambda_i)_{i \in [1, n]} \in [0, 1]^n,$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right].$$

**4. Croissance du taux d'accroissement.** Pour tout  $x_0 \in I$ , on pose  $\tau_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

- a) On suppose que, pour tout  $x_0 \in I$ ,  $f_{x_0}$  est croissante. En utilisant la croissance de  $\varphi_{x_0}$  sur  $x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$  (réels à choisir convenablement), montrer que  $f$  est convexe.
- b) On suppose que  $f$  est convexe. En utilisant l'inégalité de convexité en  $x_0 < x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y < y$ , montrer que  $\varphi_{x_0}$  est croissante sur  $]x_0, +\infty[ \cap I$ .  
On montre de manière analogue que  $\varphi_{x_0}$  est croissante sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

**5. Caractérisation dérivable.**

- a) On suppose que  $f$  est une fonction dérivable sur  $I$ . En utilisant la croissance du taux d'accroissement, montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- b) En déduire que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessus de ses tangentes.

**6. Caractérisation deux fois dérivable.** On suppose que  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur  $I$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $f''$  est positive sur  $I$ .

7. a) En déduire que les fonctions  $\exp$  et  $\sin$  sont convexes et que la fonction  $\ln$  est concave, sur des ensembles à préciser.
- b) En déduire que

$$e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\ln(1 + x) \leq x, \forall x \in ]-1, +\infty[.$$

8. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

**Partie II : Inégalités de HÖLDER**

Soient  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Les inégalités de **HÖLDER** que nous allons établir généralisent les inégalités de **CAUCHY-SCHWARZ**.  
Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x = (a_i)_{i \in [1, n]}$  et  $y = (b_i)_{i \in [1, n]}$  deux familles de réels strictement positifs et  $f, g$  sont des fonctions continues sur un intervalle borné  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On notera  $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $I$  telles que  $|f|^p$  soit intégrable sur  $I$ .

9. Montrer que pour tout  $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,

$$\ln(uv) \leq \ln \left\{ \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \right\}.$$

**10.** Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**11.** Montrer que

$$\left| \int_I fg \right| \leq \left( \int_I |f|^p \right)^{1/p} \left( \int_I |g|^p \right)^{1/p}.$$

En déduire que le produit d'une fonction  $\mathcal{L}^p$  par une fonction  $\mathcal{L}^q$  est dans  $\mathcal{L}^1$  (on rappelle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

### Partie III : Inégalité de MINKOWSKI

On reprend les notations précédentes. On note  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^p |a_i|^p \right)^{1/p}$  et

$$\|f\|_p = \left( \int_I |f|^p \right)^{1/p}.$$

**12.** Montrer que si  $a$  et  $b$  sont des réels, alors

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|) |a + b|^{p-1}.$$

**13. a)** En étudiant  $\|x + y\|_p^p$ , montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

**b)** En déduire que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**c)** Déterminer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$ .

**14. a)** En étudiant  $\|f + g\|_p^p$ , montrer que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**b)** En déduire que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .

**c)** Montrer que  $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel normé.

**d)** Déterminer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$ .

### Mathématiciens

**CAUCHY** Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

**SCHWARZ** Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).

**JENSEN** Johan (8 mai 1859 à Nakskov-5 mar. 1925 à Copenhague).

**HÖLDER** Ludwig (22 déc. 1859 à Stuttgart-29 août 1937 à Leipzig).

**MINKOWSKI** Hermann (22 juin 1864 à Alexotas-12 jan. 1909 à Göttingen).