



Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I .

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i). f est dérivable en x_0 .

(ii). $g : (h, k) \rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ admet une limite lorsque $(h, k) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tend vers $(0, 0)$.

2. Montrer que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ peut admettre une limite lorsque h tend vers 0 sans que f soit dérivable en x_0 .

On pose $I = [0, 1]$ et (f_n) la suite de fonctions définie par

* $f_0(x) = x$.

* f_n est affine sur $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$.

* f_n et f_{n-1} sont égales en $\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n}$ et $\frac{3k+2}{3^n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$.

3. Représenter graphiquement f_0, f_1 et f_2 .

4. **Convergence uniforme.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la pente maximale de f_n vaut 2^n .

b) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$ et $x \in [\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$,

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n}{3^n}.$$

c) Montrer que $\sum (f_n + 1 - f_n)$ converge normalement vers une limite notée f .

d) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

e) Montrer que f est une fonction continue.

5. **Non dérivabilité.** Soit $x_0 \in [0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe $(h, k) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $x_0 + h = \frac{p+1}{3^n}$ et $x_0 - k = \frac{p}{3^n}$.

On pose, avec les notations de la question précédente, $\Delta_n = 3^n \left[f_n \left(\frac{p+1}{3^n} \right) - f \left(\frac{p}{3^n} \right) \right]$.

b) Montrer que $\Delta_{n+1} \in \{2\Delta_n, -\Delta_n\}$.

c) En déduire que $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

d) Montrer que f n'est dérivable en x_0 .

6. **Écriture sous forme de série.** Pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1/3 \\ -2x + 1 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ x - 1 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On prolonge g par 1-périodicité et on pose

$$g_n(x) = \frac{(-1)^{\lfloor 3^n x \rfloor}}{3^n} g(3^n x).$$

a) Montrer que $f_{n+1} - f_n = g_n$.

b) En déduire que $f(x) = x + \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.