Théorème de Stone-Weierstrass

■ ■ ■

Le théorème de Stone-Weierstrass s'énonce ainsi. Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite (P_n) de polynômes à coefficients réels.

On suppose dans la suite que $[a, b] = [0, 1]$ et que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 1$. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash [0, 1]$, $f(x) = 0$.

On admettra que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ ;\ \forall\, (x, y) \in [0, 1]^2,\ (|x - y| \leqslant \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer la valeur de I_n.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{I_n}(1 - x^2)^n.$$

2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$ vers la fonction nulle.

Pour tout entier naturel n, on définit

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t) P_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions polynomiales.

4. Montrer que $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

5. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n,\, m \geqslant n_0,\ \|S_n - S_m\|_\infty \leqslant 1.$$

b) En déduire qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ S_n = S_{n_0} + a_n.$$

c) Montrer que (a_n) converge et en déduire que g est une fonction polynomiale.

d) En déduire que le théorème de Weierstrass est faux si le segment est remplacé par un intervalle non borné.