



Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on identifiera les vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à ceux de $\mathbb{K}^n$. On notera I_n la matrice identité d'ordre n .

Si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices d'ordre n , la série de terme général A_p , notée $\sum A_p$ est la suite des sommes partielles $\left(\sum_{p=0}^N A_p \right)_{N \in \mathbb{N}}$. Si cette suite converge, sa limite est la somme de la série et notée $\sum_{p=0}^{+\infty} A_p$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série exponentielle associée à A est la série de terme général $\frac{A^p}{p!}$. Nous allons prouver que la série exponentielle converge et noterons $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$ sa somme.

1. Deux cas particuliers.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge et exprimer $\exp(A)$ en fonction des valeurs propres de A .

b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre k , i.e. $N^{k-1} \neq 0_n$ et $N^k = 0_n$. Montrer que $\sum \frac{N^p}{p!}$ converge et exprimer $\exp(N)$ comme combinaison linéaire des matrices $\{I_n, N, \dots, N^{k-1}\}$.

Pour tout vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$ et $\|A\| = \sup \{\|AX\|_\infty, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\}$.

2. Prélude. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que la norme subordonnée satisfait $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

c) Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

d) Montrer qu'il existe une constante c (indépendante de la matrice A) strictement positive telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $|a_{i,j}| \leq c \cdot \|A\|$.

3. Convergence de la série exponentielle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout entier naturel k et tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'ordre (i, j) de la matrice A^k et $e_{i,j}^{(k)}$ celui de la matrice $\sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!}$.

a) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}^{(k)}| \leq c \cdot \|A\|^k.$$

b) En déduire que pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite $(e_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

c) Conclure quant à la convergence de la série exponentielle.

4. Exponentielle d'une somme. Soient A et B deux matrices telles que $AB = BA$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k , il existe un ensemble $\Delta_k \subset \llbracket 0, k \rrbracket^2$ tel que

$$\left\| \sum_{j=0}^k \frac{(A+B)^j}{j!} - \left(\sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^k \frac{B^j}{j!} \right) \right\| \leq \sum_{(j,\ell) \in \Delta_k} \frac{\|A\|^j \|B\|^\ell}{j! \ell!}.$$

b) Montrer que pour tout entier naturel k , avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^k \frac{(\|A\| + \|B\|)^j}{j!} - \left(\sum_{j=0}^k \frac{\|A\|^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^k \frac{\|B\|^j}{j!} \right) \right| \\ = \sum_{(j,\ell) \in \Delta_k} \frac{\|A\|^j \|B\|^\ell}{j! \ell!}. \end{aligned}$$

c) En déduire que $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

d) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer $\exp(A+B)$ puis $\exp(A) \cdot \exp(B)$.

5. Applications.

a) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

b) Soient N et D deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que N soit nilpotente, D soit diagonalisable et $ND = DN$. En posant $A = D + N$, exprimer, pour tout réel t , la matrice $\exp(tA)$.

*Cette décomposition de la matrice A est la décomposition de **DUNFORD**. La matrice $\exp(tA)$ apparaît naturellement dans la résolution de systèmes différentiels linéaires.*

6. Extension d'un résultat classique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Pour tout entier naturel k non nul, montrer que

$$\left\| \left(I_n + \frac{A}{k} \right)^k - \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \left| \left(1 + \frac{\|A\|}{k} \right)^k - \sum_{j=0}^k \frac{\|A\|^j}{j} \right|.$$

b) En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{k} \right)^k = \exp(A)$.

Mathématiciens

DUNFORD Nelson (12 déc. 1906 à St Louis-7 sept. 1986 à Sarasota).